Άσκηση! Δ.ο. $Log(\mathbb{C}^*) = \Lambda := \{w \in \mathbb{C}, Im\,w \in (-\pi,\pi]\}$
και ότι $Log: \mathbb{C}^* \longrightarrow \Lambda$ 1-1 και επί με αντίστροφη
την $exp: \Lambda \longrightarrow \mathbb{C}^*$

Μάθημα 6ο

09/03/2018

Μιγαδικές Συν/σεις

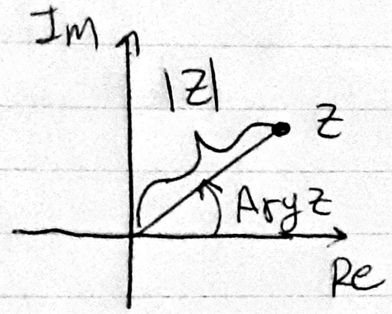
$e^z = e^{x+yi} = e^x e^{yi} = cosy + isiny$

$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdots z}_{n-\text{φορές}}$

$z^{-n} = \frac{1}{z^n}$

$z^0 = 1$

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z| e^{i Arg z}} = \underbrace{\sqrt[n]{|z|}}_{\in(0,+\infty)} e^{i \frac{Arg z}{n}}, \quad \sqrt[n]{0} = 0$



$Log := log: \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$: κύριος κλάδος της λογαριθμικής συν/σης αποτελεί επέκταση του φυσικού λογάριθμου $\underbrace{ln}_{=log}: (0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

$log\,z = \underbrace{log|z|}_{\underset{\mathbb{R}}{=} ln\underbrace{|z|}_{>0}} + i\,Arg z$

Οι άλλοι κλάδοι: $log_k: \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$, $log_k(z) = log_k z =$
$= log z + i Arg z + 2k\pi i$ $(\Rightarrow Log = log = log_0)$ και έχουν
εικόνες $log_k(\mathbb{C}^*) = \Lambda_k := \{w \in \mathbb{C} : Im\,w \in (-\pi+2k\pi, \pi+2k\pi]\}$

Άσκηση (*) $\underbrace{log}_{log_0}(\mathbb{C}^*) = \Lambda = \Lambda_0 = \{w \in \mathbb{C} : Im\,w \in (-\pi,\pi]\}$

Πράγματι: $log(\mathbb{C}^*) \subset \boxed{\{w \in \mathbb{C} : Im\,w \in (-\pi,\pi]\} = \Lambda}$

αφού $\forall z \in \mathbb{C}^* : log z \overset{ορ.}{=} log|z| + i \underbrace{Arg z}_{\in(-\pi,\pi]} = Re(log) + i\,Im(log)$

και $\forall \underset{\uparrow}{w} \in \Lambda$ ($w = u+iv$) Θεωρώ $z = e^w$ και έχουμε

$$\log z = \underbrace{\log(e^w)}_{= w = u+iv} \underset{\text{ορ}}{=} \log|e^w| + i\,\mathrm{Arg}(e^w) =$$

$$e^u e^{iv} = |e^w| e^{iv} = |e^w| e^{i\,\mathrm{Arg}\, w}$$

$$= \log e^u + i\,\underbrace{\mathrm{Arg}(e^u e^{iv})}_{= v \text{ αν } v \in (-\pi, \pi]}$$

οπότε για $w = u+iv$, $v \in (-\pi, \pi]$ έχω το ζητούμενο.
Οπότε δείξαμε ότι $\forall w \in \Lambda$ $\exists z \in \mathbb{C}^*$:

$\log z = w$, δηλαδή δ.ο. $\Lambda \subset \log(\mathbb{C}^*)$ και άρα συνολικά:

$$\log(\mathbb{C}^*) = \Lambda$$

Άρα η $\log : \mathbb{C}^* \longrightarrow \Lambda$ είναι επί. Επίσης βλέπουμε ότι:

$$f = \log : \mathbb{C}^* \longrightarrow \Lambda$$

$$g = \exp : \Lambda \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

τότε έχουμε $(g \circ f)(z) \overset{\text{ορ}}{=} \exp(\log z) \overset{\text{ορισ.}}{=\!=}$

$$= \exp(\log|z| + i\,\mathrm{Arg}\, z) \overset{\text{ορ}}{=} e^{\log|z| + i\,\mathrm{Arg}\, z} = |z| e^{i\,\mathrm{Arg}\, z} = z$$

δηλ. $g \circ f = id_{\mathbb{C}^*}$

και $\forall w \in \Lambda$ με $w = u+iv$. $v \in (-\pi, \pi]$

$$(f \circ g)(w) = \log(\exp(w)) = \log(\underbrace{e^{w}}_{e^u e^{iv}}) \quad (= u+vi) \quad =$$

$$= \log \underset{>0}{e^u} + i\,\underbrace{\mathrm{Arg}(e^u e^{iv})}_{2k\pi + v \xrightarrow[k=0]{v \in \Lambda}} = u+iv = w \checkmark$$

6ος

$z = \overset{\geq 0}{r} e^{i\varphi}$ ΠΑΝΤΑ $\Longrightarrow r = |z|$ και φ η «γωνία» δηλ. όρισμα mod2π $\varphi = \arg z$

• Άρα, χρησιμοποιώντας: $f: X \to Y$ 1-1 και επί $\Longleftrightarrow$

$\exists\, g: Y \to X$ έτσι ώστε $f \circ g = id_Y$, $g \circ f = id_X$ και

$\log: \mathbb{C}^* \to \Lambda$ 1-1 και επί με αντίστροφη $\exp: \Lambda \to \mathbb{C}^*$ και το αντίστροφο της πρότασης (δηλ. $\log = (\exp)^{-1}$)

Μια τελευταία σημ/ση: Η λ-δύναμη του $z \in \mathbb{C}^*$ με $\lambda \in \mathbb{C}$

ΟΡΙΣΜΟΣ

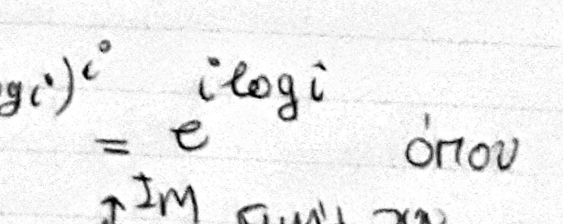
$$\mathbb{C}^* \ni z \longmapsto z^\lambda := \left(e^{\log z}\right)^\lambda = e^{\lambda \log z}$$

$\log: \mathbb{C}^* \to \Lambda$
$\exp: \Lambda \to \mathbb{C}^*$
η μια αντίστροφη της άλλης.
$\Lambda = \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} w \in (-\pi, \pi]\}$

$e^{\lambda \log z} = \log|z| + i \operatorname{Arg} z$ ονομάζεται κύριος κλάδος της λ-δύναμης. Οι άλλοι κλάδοι είναι οι $(z^\lambda)_k = e^{\lambda \log_k z}$, $k \in \mathbb{Z}$

Ασκήσεις ① $i^i = e^{(\log i)^i} = e^{i \log i}$ όπου

$\log i = \ln \underbrace{|i|}_{1}^{\geq 0} + i \underbrace{\operatorname{Arg} i}_{\pi/2}$

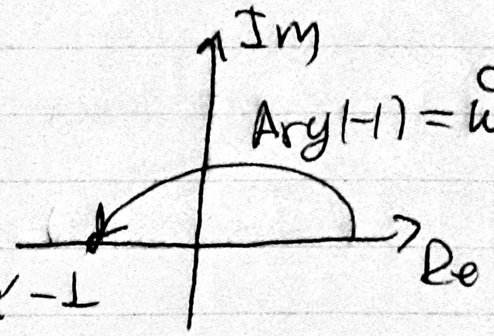


$\log i = i\frac{\pi}{2} \Rightarrow i^i = e^{i \log i} = e^{i^2 \frac{\pi}{2}} = e^{-\pi/2}$

$-1 \in \mathbb{C}^* \Rightarrow$ άρα μπορώ να το γράψω έτσι

② $(-1)^i = \left(e^{\log(-1)}\right)^{i} \underset{ορισ}{=} e^{i\log(-1)}$

με $\log(-1) = \underbrace{\ln|-1|}_{=0} + i\,Arg(-1) = i\pi$

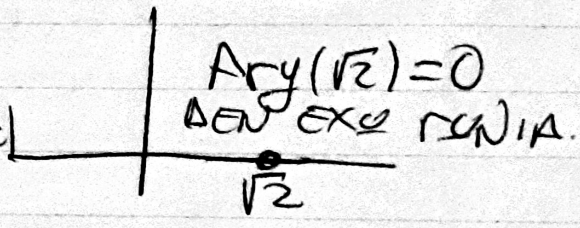


Θέλω τη γωνία του μιγαδικού
−1 ποια γωνία θα αντιστοιχεί −1
μεταξύ $(-\pi, \pi]$

$(-1)^i = e^{ii\pi} = e^{-\pi}$

③ $(\sqrt2)^{i\sqrt3} = \left(e^{\log\sqrt2}\right)^{i\sqrt3} \underset{ορισ}{=} e^{i\sqrt3\log\sqrt2} = e^{i\sqrt3\ln\sqrt2}$ ⊜

$\log(\sqrt2) = \ln|\sqrt2| + i\,\cancel{Arg(\sqrt2)}^{\,0} = \ln|\sqrt2| = \log(\sqrt2)$



⊜ $\cos(\sqrt3\ln\sqrt2) + i\sin(\sqrt3\ln\sqrt2)$

και $\sqrt3\ln\sqrt2$ είναι το $\arg\left((\sqrt2)^{i\sqrt3}\right) = Arg\left((\sqrt2)^{i\sqrt3}\right) + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Ερώτημα: Μήπως $k=0$?

δηλ. $\sqrt3\ln\sqrt2$ είναι πραγματικά το $Arg\left((\sqrt2)^{i\sqrt3}\right)$

δηλ. $\sqrt3\ln\sqrt2 = Arg\left((\sqrt2)^{i\sqrt3}\right)$ δηλ $\sqrt3\ln\sqrt2 \in (-\pi,\pi]$ δηλ.

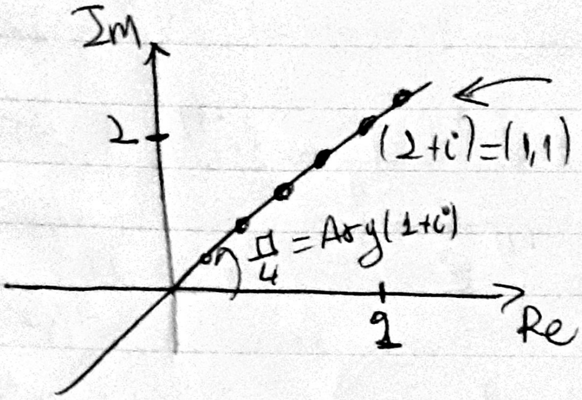
$\sqrt3\ln\sqrt2 \le \pi$? δηλ. $\ln\sqrt2 \le \frac{\pi}{\sqrt3}$?

$\ln\sqrt2 \le \frac{\pi}{\sqrt3} \Rightarrow \sqrt2 \le e^{\pi/\sqrt3} \Rightarrow 2 \le e^{\frac{2\pi}{3}}$

όμως $e^{\frac{2\pi}{\sqrt3}} > e^{\pi} > e^1 = e \approx 2 \Rightarrow$ ΝΑΙ, $k=0$

④ $(1+i)^i = e^{i\log(1+i)}$

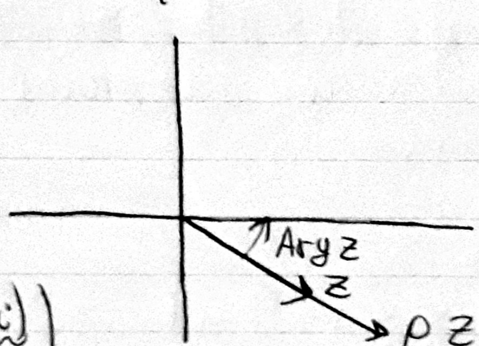
$$\log(1+i) = \log\Big(\underbrace{|1+i|}_{=\sqrt{2}}\, e^{i\,Ary(1+i)}\Big)$$



όλα τα σημεία εδώ πάνω έχουν γωνία π/4, το μόνο που αλλάζει είναι το μήκος.

$$Arg(\rho z) = Arg\, z \quad \forall \rho>0 \quad \forall z\in\mathbb{C}^*$$

↑ Βλέπω μια ημιευθεία



$\rho z \xlongequal[\text{του } z]{\text{πολική μορφή}} \rho|z| e^{i Arg z}$ $=|\rho z| > 0$

$$\Rightarrow \log\big(\sqrt{2}\, e^{i Arg(1+i)}\big)$$

$$\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= Arg\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = e^{i\frac{\pi}{4}}$$

(αφού $\cos\pi/4 = \sin\pi/4 = \frac{1}{\sqrt{2}}$)

$$= Ary\big(e^{i\pi/4}\big) = \frac{\pi}{4}$$

$$\log\big(\sqrt{2}\, e^{i Arg(1+i)}\big) = \log\big(\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}\big) \xlongequal{\text{ορισμός}} \ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1+i)^i = e^{i\log(1+i)} = e^{i(\ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4})} = e^{i\ln\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}} = e^{-\frac{\pi}{4}} e^{i\ln\sqrt{2}}$$

με κύριο όρισμα $Ary((1+i)^i) = \ln\sqrt{2}$

(αφού $\ln\sqrt{2} > 0$ είναι $\ln\sqrt{2} \le \pi$
$\sqrt{2} \le e^{\pi}$
$2 \le e^{2\pi}$
$2 \le e$)

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Για $\lambda = n \in \mathbb{N}$ έχουμε:

$$z^\lambda = e^{\lambda \log z} = e^{n \log z} = \left(e^{\log}\right)^n = z^n$$

Αντίστοιχα: **Ασκήσεις**

- Για $\lambda = 0$: $z^0 = 1$
- Για $\lambda = -n,\ n \in \mathbb{N}$: $z^\lambda = \frac{1}{z^n} = z^{-n}$
- Για $\lambda = \frac{1}{n}$: $z^\lambda = z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{z}$

Ασκήσεις (προετοιμασία)

① Τοπολογία του $\mathbb{R}^2$ με $\|(x,y)\| = |x+yi|$ = τοπολογία του $\mathbb{C}$

(ανοικτά, κλειστά, εσωτερικά, συνοριακά, κλειστή θήκη)

② $z_n \longrightarrow z$: $\mathbb{C}$

$z_n = (x_n, y_n)$, $z = (x,y)$

$\iff \|(x_n,y_n) - (x,y)\| \to 0$ $\quad \mathbb{R}^2$] σύγκλιση ακολουθίας

$\underbrace{|(x_n + y_n i)}_{=z_n} - \underbrace{(x+yi)}_{=z}| \to 0$

$\Rightarrow z_n = \underset{\mathrm{Re}\, z_n}{x_n} + i \underset{\mathrm{Im}\, z_n}{y_n} \longrightarrow \underset{\mathrm{Re}\, z}{x} + i \underset{\mathrm{Im}\, z}{y} = z$

$\Rightarrow \mathrm{Re}\, z_n \longrightarrow \mathrm{Re}\, z \ \wedge\ \mathrm{Im}\, z_n \longrightarrow \mathrm{Im}\, z$

Ασκήσεις: ① $\exists \lim\limits_{n\to\infty} i^n = i$

② $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{i^n}{n} = i$

③ Αν: $|z|<1 \overset{\text{ΝΔΟ}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{n\to\infty} z^n = 0$ και $z_n \to z \Rightarrow$

$\Rightarrow |z_n| \to |z|$ και ΝΔΟ: $n z^n \to 0$

$$\sqrt[n]{n} + \frac{\sqrt[n]{2}\, i}{\sqrt{n^2+n+1}} \longrightarrow 1+i$$

Λύσεις ασκήσεων του προηγούμενου μαθήματος

1) $z^{\frac{1}{n}} \overset{?}{=} \sqrt[n]{z} \quad \forall\, z \in \mathbb{C}^*$

ΛΥΣΗ

• $z^{\frac{1}{n}} \overset{\text{op.}}{=} e^{\frac{1}{n}\log z} \overset{\text{op.}}{=} e^{\frac{1}{n}(\ln|z| + i\operatorname{Arg}z)} \overset{\text{op.}}{=} e^{\frac{1}{n}\ln|z|} \cdot e^{i\frac{\operatorname{Arg}z}{n}} \overset{R}{=}$
$= |z|^{1/n}$

• $\sqrt[n]{\underset{>0}{|z|}}\; e^{i\frac{\operatorname{Arg}z}{n}} \overset{R}{=} |z|^{\frac{1}{n}}$

2) Επίλυση της az^2+bz+c, $a,b,c,z \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$

$az^2+bz+c=0 \iff z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} = 0 \iff$

$\iff \left(z+\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = 0 \iff$

$\iff \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - ca}{a^2} =: w$

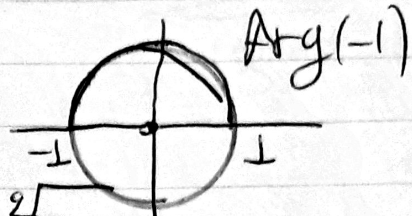
$\iff \boxed{\tilde{z}^2 = w} \rightsquigarrow$

Είδαμε ότι $\tilde{z}^n = w$, $n \in \mathbb{N}$ έχει τις λύσεις

$$\tilde{z}_k = |w|^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{Arg w + 2k\pi}{n}\right)}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

$n=2 \Rightarrow$ $\tilde{z}_0 = |w|^{\frac{1}{2}} e^{i\left(\frac{Arg w}{2}\right)}$ και

$$\tilde{z}_1 = |w|^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{Arg w}{2}} \cdot \underbrace{e^{i\pi}}_{=-1} \Rightarrow \tilde{z}_1 = -\tilde{z}_0 = -\sqrt[2]{w}$$



Άρα $(\sim) \iff \tilde{z}^2 = w \iff \tilde{z} = \pm\sqrt[2]{w}$

$$\iff z = \frac{-b}{2a} + \sqrt[2]{w}$$

Ειδικότερα, παρατηρείται ότι: Αν $a, b, c \in \mathbb{R}$ τότε

για $b^2 - 4ac > 0$

$$z = \frac{-b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2-4ac}{a^2}}$$

$b^2 - 4ac = 0$: $z = \frac{-b}{2a}$

$b^2 - 4ac < 0$

$$z = \frac{-b}{2a} \pm i\left|\frac{b^2-4ac}{a^2}\right|^{\frac{1}{2}}$$ άσκηση

όλα $e^{i\phi}$ βρίσκονται πάνω στον μοναδιαίο κύκλο.

- $z^2=-1$ ει $z \pm \sqrt[2]{-1} \overset{\text{ορ.}}{=} \pm\left(|-1|^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\pi}{2}}\right) = \pm \underbrace{e^{i\frac{\pi}{2}}}_{=i}$

Θέλω σημείο που να έχει γωνία $\pi/2$: το i

Αρα! $z = \pm i$

- $i^2=-1$ έχει λύσεις τα $\pm i$: $i=\sqrt{-1}=\sqrt[2]{-1}$ με τον ορισμό $\sqrt[n]{z}$

<u>Ασκηση</u> Νδο κάθε σύνολο της μορφής :

$$G=\{z\in\mathbb{C} : A|z|^2+2Re(Bz)+C=0\},\ A,C\in\mathbb{R},\ B\in\mathbb{C},\ |B|>AC$$

<u>ΛΥΣΗ</u>

$Re(Bz)=\bar{B}\bar{z}+Bz$

$|z|^2=z\cdot\bar{z}$

Αντιστοιχεί στο μιγ. επίπ. με ευθεία αν $A=0$ και κύκλο αν $A\neq0$ και αντίστροφο (δλδ οποιαδήποτε ευθεία ή οποιοσδήποτε κύκλος αντιστοιχίζεται στο μιγ. Επίπ. με αυτό το σύνολο)

Έστω $B=ReB+ImB = \lambda+i\mu$

$z=Rez+iImz = x+yi$

Τότε η εξίσωση $A|z|^2+2Re(Bz)+C=0$ <u>γίνεται:</u>

$$A(x^2+y^2)+2(\lambda x-\mu y)+C=0,\ \mu\varepsilon\ \lambda^2+\mu^2>AC$$

$$Bz=(\lambda+i\mu)(x+iy)=\lambda x-\mu y+i(\ldots)$$

Αν $\boxed{A=0}$: η εξίσωση είναι: $2(\lambda x - \mu y) + C = 0$

$\lambda^2 + \mu^2 > 0$ δλδ, ευθεία στο επίπεδο

Αν $\boxed{A \neq 0}$ $\quad x^2 + y^2 + 2\dfrac{\lambda}{A}x - 2\dfrac{\mu}{A}y + \dfrac{C}{A} = 0$

συμπλ. τετρ.: $\left(x + \dfrac{\lambda}{A}\right)^2 + \left(y - \dfrac{\mu}{A}\right)^2 + \dfrac{C \cdot A}{A \cdot A} - \dfrac{\lambda^2}{A^2} - \dfrac{\mu^2}{A^2} = 0 \iff$

$\iff \left(x + \dfrac{\lambda}{A}\right)^2 + \left(y - \dfrac{\mu}{A}\right)^2 = \dfrac{\lambda^2 + \mu^2 - AC}{A^2} > 0$

ΚΥΚΛΟΣ $\qquad$ Αντίστροφα (σπίτι)